1次元KPZ方程式の厳密解(非平衡系の物理-非平衡ゆらぎと集団挙動-,研究会報告)

笹本, 智弘

1次元KPZ方程式の厳密解[1]

千葉大学 大学院理学研究科　　笹本 智弘 [2]

KPZ方程式は界面成長を記述する方程式でよく知られているものだが, 方程式の定義自体に問題があったこともあってかこれまで具体的な解は得られていなかった. 我々はCole-Hopf変換を用いたKPZ方程式の正則化と非対称排他過程に関する揺らぎの結果をもとに, 1次元KPZ方程式の解を得ることが出来た. 今後種々の一般化や応用があるのではないかと期待している.

1 方程式

Kardar-Parisi-Zhang(KPZ) 方程式は, よく知られた界面成長を記述する方程式である. その1次元版は

$$\partial_t h(x,t) = \tfrac{1}{2}\lambda(\partial_x h(x,t))^2 + \nu\partial_x^2 h(x,t) + \sqrt{D}\eta(x,t)$$

というものである [1]. ここで $x \in \mathbb{R}$ は空間の位置を表し, $t \geq 0$ は時間を表し, $h(x,t) \in \mathbb{R}$ は時刻 t, 位置 x での界面高さを表す. また $\eta(x,t)$ はガウシアンホワイトノイズであり, $\langle \eta(x,t)\eta(x',t')\rangle = \delta(x-x')\delta(t-t')$. $\lambda, \nu, D > 0$ は方程式のパラメータで, ν は拡散的な緩和の強さ, λ は非線型性, D はノイズの強さを表す.

KPZ自身による, 動的繰り込み群の解析によると, KPZ方程式で記述される界面の高さ揺らぎは長時間極限 $(t \to \infty)$ で $O(t^{1/3})$ のようにスケールされる. この指数は非ガウス揺らぎを表しており, 多くの界面成長で見られるものである (KPZ普遍性).

KPZ方程式に関しては, これまで数多くの研究がなされてきていたが, 数学的に正当化出来るレベルでの解析はこれまであまり多くはなかった. その理由の一つは, KPZ方程式の定義そのものに問題があるからである. KPZ方程式の定常解はブラウン運動で与えられるが, その微分さらにはその2乗が方程式に表れていることに注意しよう. これはノイズの空間方向相関が δ 関数になっていることに起因する.

2 スケーリング極限分布

統計力学的な観点からは, 一番興味があるのは方程式の普遍的な性質であり, それであれば同じ普遍性クラスに属していてより取扱い易いモデルを調べるというアプローチが考えられる. 実際,

[1]この原稿は, 編集部の方から特にお願いされて執筆した記事, ではない.

[2]E-mail: sasamoto@math.s.chiba-u.ac.jp

KPZ 普遍性クラスの理解は1次元非対称排他過程 (asymmetric simple exclusion process, ASEP) 等の格子モデルに関する研究により大いに進んできた. ASEP は, 1次元格子上を多数の粒子が体積排除の相互作用の下で右へ rate p, 左へ rate q で非対称ランダムウォークをする確率過程であるが, 粒子のいるサイトを右あがりの slope, 粒子のいないサイトを右下がりの slope と読み直すことにより界面成長のモデルとみなすことができる. シミュレーションや周期系 ASEP に対する Bethe ansatz を用いたエネルギーギャップの解析から, 界面揺らぎが $O(t^{1/3})$ のように振る舞うことがわかり, KPZ 普遍性クラスに属すると考えられる.

さらに ASEP に対しては, 揺らぎの指数にとどまらず, その分布まで同定された. 結果は次のようである. 時刻 0 で原点より右側の格子点が全て埋まっている step 初期条件において, $N(0,t)$ を原点での時刻 t までの粒子のカレントとするとき, $t\to\infty$ で

$$N(0,t/(q-p)) \simeq \tfrac{1}{4}t - 2^{-4/3}t^{1/3}\xi_{\mathrm{TW}}. \tag{1}$$

ただしここで ξ_{TW} は GUE Tracy-Widom(TW) 分布 [2] に従う確率変数である. GUE TW 分布は Airy 核 K_{Ai} を

$$K_{\mathrm{Ai}}(x,y) = \int_0^\infty \mathrm{d}\lambda \mathrm{Ai}(x+\lambda)\mathrm{Ai}(y+\lambda)$$

とするとき Fredholm 行列式

$$\mathbb{P}[\xi_{\mathrm{TW}} \le s] = \det(1 - P_s K_{\mathrm{Ai}} P_s)$$

で定義される. ただしここで P_s は $[s,\infty)$ への射影演算子である. この分布は最初 GUE(Gaussian unitary ensemble) というランダム行列の最大固有値の分布として得られたが, その後ランダム置換やタイリングの問題にも現れることが分かってきた.

この結果 (1) は最初 TASEP の場合に Johansson によって Young tableax の組合せ論に帰着することによって示され [3], その後最近になって Tracy, Widom によって Bethe ansatz を用いることによって一般の場合に示された [4]. 界面成長の言葉では, 初期条件は wedge 型となっており, (1) はスケーリング極限における界面の揺らぎに関する分布を与えていると読み直すことが出来る. ユニバーサリティの信念からは, 曲率のある界面揺らぎが GUE TW 分布で記述されるというのは KPZ 普遍性クラスに属する全ての系で成り立つと考えられるが, 実際にそれが正しいことを確認することは全く自明では無い. しかし 2010 年竹内・佐野は液晶乱流を用いた実験においてこの TW 分布が明確に見られることを示した [5]. スケーリング指数の確認すら容易ではなかった KPZ 系の揺らぎ分布まで観測できたことは驚くべきことである.

3 KPZ 方程式の解

KPZ 方程式の解が得られたといっても, まだ特殊な初期条件の場合に 1 点における高さの分布が計算されたに過ぎない. 我々が考えたのは次のような初期条件である.

$$h(x,0) = -|x|/\delta, \quad \delta \ll 1$$

時刻 t でのマクロな界面の形は

$$h(x,t)=\begin{cases}-x^2/2\lambda t & \text{for } |x|\le \lambda t/\delta\,,\\ (\lambda/2\delta^2)t-|x|/\delta & \text{for } |x|>\lambda t/\delta\end{cases}$$

のようになっており, wedge 型の初期条件といってよい.

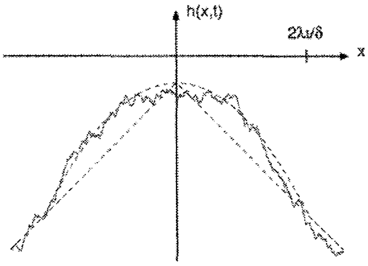

図 1: 狭い wedge 型初期条件の界面

さて ξ_t が次の確率密度を持つとしよう.

$$\rho_t(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\gamma_t \mathrm{e}^{\gamma_t(s-u)}\exp\big[-\mathrm{e}^{\gamma_t(s-u)}\big]\big(\det(1-P_u(B_t-P_{\mathrm{Ai}})P_u)-\det(1-P_uB_tP_u)\big)\mathrm{d}u$$

ここで $P_{\mathrm{Ai}}(x,y)=\mathrm{Ai}(x)\mathrm{Ai}(y)$, P_u は $[u,\infty)$ への射影演算子, また積分核 B_t は

$$B_t(x,y)=K_{\mathrm{Ai}}(x,y)+\int_0^{\infty}\mathrm{d}\lambda(\mathrm{e}^{\gamma_t\lambda}-1)^{-1}\big(\mathrm{Ai}(x+\lambda)\mathrm{Ai}(y+\lambda)-\mathrm{Ai}(x-\lambda)\mathrm{Ai}(y-\lambda)\big)\,.$$

我々の結果は次のようである [7, 6, 8, 9]. (同時期に Amir らも同じ問題を研究していた [10].)

定理. 上記初期条件のもとで KPZ 方程式で記述される界面高さ $h(x,t)$ に対し

$$(\lambda/2\nu)h(x,t/2\nu)=-x^2/2t-\tfrac{1}{12}\gamma_t^3+2\log\alpha+\gamma_t\xi_t$$

ここで $\gamma_t=2^{-1/3}\alpha^{4/3}t^{1/3}$, $\quad\alpha=(2\nu)^{-3/2}\lambda D^{1/2}$.

右辺第一項はマクロな界面の形に対応しており, 次の 2 項は位置によらない一様なシフトを表す. 最後の項が KPZ 方程式で記述される界面の非自明な揺らぎを表しており, $t^{1/3}$ に比例してその振幅は上で与えた確率密度で与えられる.

このように一旦解が得られれば, スケーリング極限でどのような分布が得られるかは容易に分かる. 上記の積分核 B_t で $\lim_{t\to\infty}B_t(x,y)=K_{\mathrm{Ai}}(x,y)$ となることからも予想されるように $\lim_{t\to\infty}\xi_t=\xi_{\mathrm{TW}}$ である. つまり極限において KPZ 界面の揺らぎは Tracy-Widom 分布が記述される. これは KPZ 方程式が KPZ 普遍性クラスに属していることを示しているといえる. この文章は一見矛盾しているようにも思えるが, これまで KPZ 方程式に関しては指数以上の情報は得られておらず, 一方で ASEP 等の KPZ 普遍性クラスに属する離散界面成長模型に対しては揺らぎの分布関数まで求まっていたことを考えると, 現在のところある模型が KPZ 普遍性クラスに属しているかどうかの判定法としては, 揺らぎの分布がスケーリング極限において ASEP のそれと一致するか否かというものを採用することが順当であり, その意味では KPZ 方程式が KPZ 普遍性クラスに属するかどうかというのは意味のある問であったのだが, それが今回の解析によって肯定的に解決されたといえる.

もちろん$t \to \infty$とするだけでなく, Fredholm 行列式を数値的に評価することにより, スケーリング極限を取るまえの有限の時刻tにおける分布を調べることや, さらに上記の積分核を$1/t$で展開することにより, 分布の Tracy-Widom 分布からのずれを具体的に評価することもできる. その結果例えば平均が$O(t^{-1/3})$の次数で減少することがわかるが, これは理論的解析の前に竹内・佐野の実験で見られていたものと一致していたのである.

ここでは結果の導出について述べる余裕が無かった. 詳細は文献を見ていただきたい.

謝辞

共同研究者 H. Spohn 氏, 今村卓史氏に感謝します.

参考文献

[1] M. Kardar, G. Parisi, Y-C. Zhang, Dynamic scaling of growing interfaces, Phys. Rev. Lett. **56**, 889–892 (1986).

[2] C.A. Tracy, H. Widom, Level-spacing distributions and the Airy kernel, Commun. Math. Phys. **159**, 151–174 (1994).

[3] K. Johansson, Shape fluctuations and random matrices, Comm. Math. Phys. **209**, 437–476 (2000).

[4] C.A. Tracy, H. Widom, Asymptotics in ASEP with step initial condition, Comm. Math. Phys. **290**, 129–154 (2009).

[5] K. Takeuchi and M. Sano, *Growing Interfaces of Liquid Crystal Turbulence: Universal Scaling and Fluctuations*, Phys. Rev. Lett. **104** (2010), 230601.

[6] T. Sasamoto and H. Spohn, *Exact height distributions for the KPZ equation with narrow wedge initial condition.*, Nucl. Phys. B **834** (2010), 523–542.

[7] T. Sasamoto and H. Spohn, *The crossover regime for the weakly asymmetric simple exclusion process*, J. Stat. Phys. **140** (2010), 209–231.

[8] T. Sasamoto and H. Spohn, *Universality of the one-dimensional KPZ equation.*, Phys. Rev. Lett. **834** (2010), 523–542.

[9] T. Sasamoto and H. Spohn, *The 1+1-dimensional Kardar-Parisi-Zhang equation and its universality class*, J. Stat. Mech. online, arXiv:1010.2691.

[10] G. Amir, I. Corwin, and J. Quastel, *Probability distribution of the free energy of the continuum directed random polymer in* $1+1$ *dimensions arXiv:1003.0443.*